И.Б. Шапировский, В.Б. Шехтман

Современная модальная логика: между математикой и информатикой[1]

Модальная логика возникла в древности для формализации понятий возможного и необходимого. Современная модальная логика стала одним из инструментов решения задач информатики — как теоретических, так и вполне прикладных. Произошел достаточно неожиданный переход из области абстрактных философских категорий в актуальную и практически значимую современную дисциплину. Он был обусловлен тем, что модальная логика (как и логика в целом) приобрела развитый математический аппарат — алгебраический, топологический, теоретико-модельный. В настоящей работе мы хотим, избегая сложных технических деталей, познакомить читателя с некоторыми базовыми математическими понятиями модальной логики.

1. Введение

Обыкновенно под логикой понимают определенную научную дисциплину, традиционно составляющую часть философии. Специалисты также используют термин «логика» в узком смысле — для указания на определенную математическую структуру. Существует множество различных логик — например, классическая логика первого порядка, пропозициональная динамическая логика PDL, линейная логика Жирара и т.п. Для них имеются строгие математические определения.

Логика как область человеческой деятельности постоянно развивается и изменяется, и мы не можем дать ей окончательного определения. В древности логика служила для построения правильных рассуждений и аргументации, в средние века — для обоснования теологии, после эпохи Возрождения — для обоснования науки. В начале XX века математическая логика почти отождествлялась с основаниями математики («метаматематикой», в терминологии Гильберта). В настоящее время метаматематика — важный, но не единственный раздел математической логики.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00615, а также в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» и с использованием средств субсидии по Проекту государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

Предмет математической логики сложно определить из-за многообразия ее разделов, различных по задачам и стилю. Поэтому вместо поиска подходящего определения перечислим главные составляющие этой области.

В конце 1970-х годов основные результаты в области математической логики были собраны в «Справочной книге по математической логике» под редакцией Барвайса [2]. Ее оглавление дает представление о структуре нашей дисциплины в тот период. Справочник состоит из четырех томов — «Теория моделей», «Теория множеств», «Теория рекурсии» и «Теория доказательств и конструктивная математика».

Эти направления в математической логике по-прежнему сохраняются. Вместе с тем, продолжалось стремительное развитие теоретической информатики, вызванное компьютерной революцией. Теория рекурсии стала небольшой традиционной частью этой громадной области. Теория доказательств (как и конструктивная математика) также оказалась под влиянием современных запросов информатики. Исследования неклассических логик переместились с периферии в центр математической логики. Заметим, что среди огромного многообразия неклассических логик лишь немногие представлены в книге Барвайса: некоторые конструктивные логики и теории (в основном интуиционистские), а также базовая модальная логика доказуемости.

Вот некоторые типичные проблемы, которые исследуются в математической логике: непротиворечивость аксиоматических теорий; алгоритмическая разрешимость различных дедуктивных систем; полнота аксиоматических теорий в различных семантиках; определимость свойств математических структур в различных языках; специальные синтаксические свойства теорий — например, интерполяционное свойство или дизъюнктивное свойство. Во многих случаях эти исследования используют методы из самых разных «нелогических» областей современной математики.

Логики в узком смысле — формальные математические объекты (конкретные множества или структуры) и потому могут быть точно определены. Таким образом, математическая логика как наука изучает логики как объекты. Похожая двойная терминология встречается и в других областях математики — например, алгебра изучает алгебры, геометрия — геометрии, топология — топологии и т.д. Модальная логика — не исключение: она изучает модальные логики.

В этой работе мы даем краткое введение в модальную логику. Мы начинаем с общей проблематики математической логики (раздел 2), приводим основные определения и некоторые результаты теории модальных логик (разделы 3 и 4); в качестве иллюстрации разбирается один несложный пример — модальная логика неравенства (раздел 5).

2. Некоторые базовые понятия

Базовыми понятиями логики являются *слово* (*logos*) и *высказывание* (*sententia*, что означает на латыни не только грамматическую конструкцию, но и конкретный аргумент[2]). Логика всегда имела дело со словами (или текстами), написанными в определенном языке. Это связывает ее с другими дисциплинами, изучающими слова и языки (такими, как лингвистика или комбинаторная теория групп). Однако логиков интересуют одновременно и слово, и его значение. Поэтому языки, изучаемые в логике, обыкновенно имеют синтаксическую и семантическую составляющую — так же, как и естественный язык.

В логике этот дуализм проявляется во взаимодействии двух областей: теории доказательств и теории моделей. Любой работающий логик имеет дело одновременно с ними обеими: доказательства объясняют наши модели, а модели подтверждают корректность наших доказательств. Здесь можно провести аналогию с тем, как соотносятся теория и эксперимент в физике или других естественных науках. Однако модели в чистой математической логике по-прежнему являются абстрактными и теоретическими, в то время как прикладная логика может использовать модели, отражающие действительность — подобно физике или прикладной математике.

2.1. Синтаксис формальных языков и исчислений

В исторической перспективе последних двух веков развитие математической логики было стремительным, и изменения затронули также и формальный логический синтаксис. Первоначальная идея представления формальной логики как булевой логики высказываний трансформировалась в весьма амбициозные проекты аксиоматизации математики на базе классической логики предикатов — формализм Гильберта и программу Бурбаки. Эти программы в конечном счете не были реализованы, но они подчеркнули важную роль классического

[2]Упомянем в этом контексте рассказ Варлама Шаламова «Сентенция», в котором это слово означало возвращение героя к человеческому существованию [15].

языка первого порядка как кандидата на универсальный язык науки[3]. (Восходящая к Лейбницу мечта о создании такого языка по-прежнему существует.) Современная логика имеет дело с обширным многообразием специальных формальных языков. Сюда входят: пропозициональные языки, языки первого порядка, языки высших порядков, инфинитарные языки. На их основе строятся специализированные языки прикладной логики — например, языки программирования, языки запросов к базам данных и проч. Разнообразие логических языков порождает огромный спектр выразительных возможностей.

Логический синтаксис состоит из двух уровней. На первом уровне описываются *правильно построенные выражения* (в частности, высказывания), на втором уровне описываются *правильные доказательства*, позволяющие выводить новые высказывания (*теоремы*) из данного множества постулатов (*аксиом*). Оба описания могут быть даны в рамках единого формального подхода.

Формальное определение синтаксиса начинается с выбора *алфавита* — некоторого множества *символов* (или *букв*); последовательности символов называются *словами*[4]. Некоторые из слов мы объявляем *правильно построенными выражениями* — именно они и составляют то, что называется *формальным языком*. В свою очередь, некоторые выражения обозначают высказывания — они называются *формулами*. В языке могут быть также выражения, обозначающие объекты другого рода— например, «множества», «числа», «программы», «состояния» и проч.

Формальный язык обычно задается как некоторая процедура, порождающая сложные выражения из более простых. Эта процедура может быть описана, например, как вывод в определенной контекстно-свободной грамматике.

Логические исчисления находятся на втором уровне логического синтаксиса. Каждое такое исчисление задается множеством формул, которые называются *аксиомами*, и множеством *правил вывода*, позволяющих строить доказательства. Формальное *доказательство* (или *вывод*) теперь можно понимать как процесс порождения новых формул (*теорем*); каждая новая теорема получается применением правил вывода к аксиомам и/или уже доказанным теоремам. Это происходит

[3]Отметим еще недавний проект В. Воеводского «Унивалентные основания математики», где вместо классической логики предикатов предлагается использовать интуиционистскую теорию типов Мартин-Лёфа [52].

[4]Слова обыкновенно мы понимаем как конечные последовательности символов, однако в математической логике иногда рассматриваются и бесконечные слова.

в точности так же, как и при построении корректного рассуждения в традиционной логике — последовательность высказываний получается из известных фактов с помощью определенных правил[5].

Важное свойство логического исчисления — *эффективность*, т.е. мы должны уметь проверять корректность рассуждений в нашей формальной системе. Это накладывает ограничения на множества аксиом и правил, а также на определение формул языка, поскольку требуется, чтобы формулы языка и их конечные последовательности (доказательства) можно было подавать на вход некоторому алгоритму, проверяющему доказательства.

Известный стандартный пример — это классическая логика предикатов [6]. Здесь первый уровень синтаксиса состоит из синтаксически правильных выражений — термов и формул. Составные выражения строятся из атомарных по индукции.

Атомарные термы — это предметные константы и переменные, а составные термы строятся из них с помощью функциональных символов (например, если x, y — переменные, 1 — константа и $+, \times$ — функциональные символы сложения и умножения, то $(x+1) \times y$ — это составной терм).

Атомарные формулы строятся из термов и предикатных символов; например, $(x+1) \times y < x + x$ — атомарная формула (здесь $<$ — предикатный символ, а $x, y, 1, +, \times$ — те же, что и раньше). Наконец, составные формулы строятся из атомарных с помощью логических связок и кванторов. Например, $\forall x \exists y\, ((x+1) \times y < (x+x)+1)$ — формула.

На втором уровне находится аксиоматическая система логики предикатов. Ее можно представить в нескольких вариантах: как исчисление гильбертовского типа, как секвенциальное исчисление, как систему натурального (или естественного) вывода. У этого разнообразия есть несколько теоретических и практических причин: анализировать доказательства легче в исчислениях секвенций, системы гильбертовского типа проще формулировать, а натуральный вывод лучше соотносится с обычными математическими доказательствами.

Синтаксическое исследование логических языков укладывается в общий контекст математической лингвистики. Отметим, что цели, которые ставят перед собой логика и лингвистика, различны. Специалисты по логике интересуются, в основном, вопросом о том, что́

[5]Силлогизмы Аристотеля представляют собой менее формальный пример логического исчисления, но их также можно представить вполне формальным образом [10].

может быть выражено в данном языке, в то время как лингвисты отвечают на вопрос о способах выразимости, то есть как именно можно выразить то или иное понятие[6].

2.2. Семантика формальных языков и исчислений

Семантика служит двум целям: она позволяет оценивать *истинность* высказываний данного языка и строить *модели* логических исчислений (последние часто называются *аксиоматическими теориями*).

С точки зрения математической логики, определить семантику — это определить понятие модели. Ниже мы приведем ряд конкретных примеров, а сейчас отметим некоторые общие характерные черты логических семантик.

Когда мы определяем семантику логического языка L, мы рассматриваем его формулы как утверждения об определенных математических структурах; они называются *моделями* (или *интерпретациями*) *языка* L. Разумеется, истинность формулы зависит от рассматриваемой модели. Например, формула 1-го порядка $\forall x \exists y\, (y < x)$ истинна в множестве целых чисел с обычным порядком, но ложна в множестве натуральных чисел. Множество $T(M)$ всех формул[7] языка L, истинных в модели M, называется *теорией модели* M (в языке L).

Таким образом, для построения семантики данного языка мы должны, во-первых, задать класс моделей и, во-вторых, для каждой модели M из этого класса и каждой формулы φ нашего языка строго определить, что́ означает «φ истинна в модели M». Обычно такое определение дается индукцией по длине φ.

Определив понятие истинности формулы данного языка для данного класса моделей, мы можем говорить о моделях аксиоматических теорий в этом языке. А именно, M является *моделью теории* C, если все теоремы C истинны в M.

---

[6] Точной границы здесь, конечно же, нет. Типичный результат математической лингвистики — теоремы Гайфмана [21] и Пентуса [12]: язык порождается контекстно-свободной грамматикой тогда и только тогда, когда он порождается грамматикой Ламбека. С точки зрения лингвистики, это показывает, что описание синтаксиса естественного языка с использованием порождающих грамматик в стиле Хомского эквивалентно описанию с помощью категориальных грамматик в стиле Айдукевича. С точки же зрения математической логики, эти результаты говорят, что два конкретных вида аксиоматических исчислений эквивалентны — в том смысле, что они позволяют доказывать одни и те же теоремы.

[7] Техническая деталь: в случае языка 1-го порядка в $T(M)$ обычно включают *замкнутые формулы*, в которых все переменные связаны кванторами.

Исследование теорий и их моделей проводится в двух направлениях.

С одной стороны, изучаются теории конкретных структур — например, теория поля вещественных чисел в языке первого порядка (изучалась Тарским), монадическая теория второго порядка натуральных чисел с функцией следования (изучалась Бюхи). Различные языки могут быть использованы для получения различных теорий одной и той же структуры.

С другой стороны, нас могут интересовать модели тех или иных теорий — например, модели арифметики Пеано, модели теории групп (т.е. группы) и проч. Заметим, что в математике часто даются определения структур именно с помощью списка аксиом (хорошо известные примеры — аксиомы топологического пространства, аксиомы Колмогорова теории вероятностей). С некоторыми оговорками такие определения можно считать формальными теориями и изучать логическими методами.

2.3. Корректность и полнота

Если формулы, которые мы объявили аксиомами в нашем исчислении C, истинны в структуре M и истинность в M сохраняется при применении правил вывода C, то данное исчисление называется *корректным относительно модели* M. Очевидно, что тогда и все теоремы исчисления окажутся истинными в M, т.е. M — модель C. Это можно записать как $[C] \subseteq T(M)$, где $[C]$ — множество теорем C.

Более сильное свойство исчисления — *полнота*: исчисление C полно относительно модели M, если множество его теорем совпадает с множеством формул, истинных в M, т.е. $[C] = T(M)$[8].

Построение полной теории — типичная и зачастую нетривиальная задача математической логики. Во многих случаях эта задача принципиально невыполнима — например, согласно знаменитой теореме Гёделя о неполноте, невозможно эффективно аксиоматизировать[9] теорию натуральных чисел в стандартном арифметическом языке.

Тем не менее, полнота — одно из ключевых логико-математических понятий. Если доказана полнота исчисления C относительно M, то мы можем абстрагироваться от M и исследовать

---

[8]Некоторые авторы говорят о полноте, если $T(M) \subseteq [C]$. При такой терминологии в случае равенства $[C] = T(M)$ говорят о том, что C полна и корректна относительно M.

[9]Уточнение этого понятия см. ниже.

лишь совокупность теорем C. Кроме того, C может оказаться полным относительно другой, более простой модели M'. Тогда можно заменить M на M': действительно,

$$T(M) = [C] = T(M'),$$

т.е. в M и M' истинны одни и те же формулы. В этом случае модели M и M' называются *эквивалентными* в языке L (*элементарно эквивалентными*, если L — язык первого порядка).

В действительности, если нас больше интересуют конкретные свойства структуры M, чем вид исчисления C, можно пойти еще дальше: построить нужную нам M' и затем забыть про C. Именно такой подход был выбран в нестандартном анализе Робинсона: для доказательства теорем вещественного анализа, т.е. свойств поля вещественных чисел $\mathbf{R}$, строится элементарно эквивалентная модель — поле гипервещественных чисел ${}^*\mathbf{R}$ (где, например, есть бесконечно малые и бесконечно большие числа) и для нее доказываются нужные свойства. См. более подробно в [14].

2.4. Перечислимость, разрешимость и алгоритмическая сложность

В начале прошлого века среди математиков еще было распространено мнение, что всякая точно сформулированная задача в принципе может быть решена эффективно. Эта надежда оказалась неосуществимой: в настоящее время известно множество неразрешимых алгоритмических проблем в разных областях математики.

Алгоритмическую проблему можно сформулировать как вопрос о вычислении некоторой функции, перерабатывающей слова в слова (возможно, в другом языке). Одна из таких проблем — *проблема разрешения*. Она состоит в поиске алгоритма, определяющего, какие слова исходного языка X принадлежат данному его подмножеству Y; более точно, это проблема разрешения Y относительно X. Обычно при этом язык X имеет явное описание (и проблема разрешения X относительно множества всех слов в данном алфавите может быть решена). Решить проблему разрешения для Y означает построить алгоритм, который, получив на вход слово a из X, выдаст ответ «да», если $a \in Y$, и «нет» — в противном случае. Если такой алгоритм существует, то множество Y называется *разрешимым*. См. более подробно в [13].

Связанная с этим вычислительная задача — *порождение* множества Y. Она заключается в отыскании алгоритма, последовательно строящего элементы Y (возможно, с повторениями)[10]. Если такой алгоритм существует, множество Y называется *(рекурсивно) перечислимым*[11].

Опять же, большее множество X обычно перечислимо с помощью некоторой стандартной процедуры. Отсюда мы получаем

<u>Факт 1.</u> Если Y разрешимо относительно X, то Y перечислимо.

Действительно, для порождения (непустого) Y достаточно последовательно порождать слова из X и отбирать из них те, которые попадают в Y.

Большинство используемых логических языков порождается индуктивными определениями, которые эквивалентны контекстно-свободным грамматикам. Это всегда дает нам перечислимость вместе с разрешающей процедурой — в силу стандартных методов математической лингвистики. Поэтому первый уровень логического синтаксиса достаточно прост с вычислительной точки зрения.

Однако ситуация на втором уровне далеко не так проста. Действительно, даже если мы даем очень хорошее алгоритмическое определение логического исчисления и используем точное понятие доказательства, поиск конкретных доказательств может представлять серьезную трудность.

Сформулируем это более строго. Сначала заметим следующее.

<u>Факт 2.</u> Если T — аксиоматическая теория с разрешимым множеством аксиом и разрешимым множеством правил вывода, то

(1) множество доказательств теории T разрешимо,

(2) множество $[T]$ теорем теории T перечислимо.

(1) Действительно, для каждого члена данной последовательности формул мы можем последовательно проверять, является ли он аксиомой или получен из предыдущих по какому-то правилу вывода. Это означает, что в принципе любой аргумент в точно сформулированной теории можно проверить — здесь сбываются мечты философов и логиков прошлого.

(2) Перечисление множества теорем $[T]$ можно построить так. Из разрешимости множества доказательств следует его перечислимость

[10] Точнее говоря, получив на вход число n, алгоритм должен выдать n-й элемент множества Y.

[11] Пустое множество, по определению, тоже считается перечислимым.

(факт 1). Поэтому мы можем последовательно генерировать доказательства; последние формулы доказательств дадут нам искомое множество теорем.

Факт 2 справедлив и в более широком контексте. А именно, множество слов Y называется *эффективно аксиоматизируемым*, если оно совпадает со множеством теорем некоторого исчисления с разрешимым множеством аксиом и правил вывода. Тогда имеем:

Факт 3. Всякое эффективно аксиоматизируемое множество слов перечислимо.

Более того, для многих логических исчислений эффективная аксиоматизируемость и перечислимость эквивалентны (теорема Крейга). Например, это верно для теорий первого порядка или для модальных логик (см. ниже); но все же в ряде случаев эта эквивалентность нарушается [36].

Будем говорить, что логическое исчисление *разрешимо* (*перечислимо*), если разрешимо (перечислимо) множество его теорем. Для разрешимого исчисления C должна существовать разрешающая процедура, которая, получая на вход формулу, отвечает «да», если она является теоремой C, и «нет» в противном случае. С практической точки зрения мы можем потребовать большего: в случае ответа «да» получать доказательство теоремы. Если C разрешимо, то это тоже возможно: будем перечислять все доказательства и наблюдать, когда в конце доказательства встретится искомая формула φ. Если φ — теорема, то эта процедура когда-то остановится, и мы получим доказательство φ. Конечно, такой алгоритм может быть очень неэкономичным; на практике для автоматического поиска доказательств используются более оптимальные подходы.

В силу факта 1 каждое разрешимое исчисление перечислимо. Однако

Факт 4. Существуют перечислимые, но не разрешимые исчисления.

Вопрос о разрешимости конкретного исчисления может быть очень трудным. После первых результатов о неразрешимости, полученных в 1930-е годы (А. Чёрчем для арифметики Пеано и классического исчисления предикатов), исследование разрешимости стало большой областью математической логики и информатики; обзор некоторых результатов можно найти в [2, т. 3].

Феномен неразрешимости порождает следующую общую проблему: какого рода формальные теории должны разрабатываться? С одной стороны, мы хотели бы формулировать и доказывать различные свойства математических структур в логическом языке. С другой стороны, если наша теория окажется слишком сильной, она станет неразрешимой. Более того, во многих случаях теории конкретных структур $T(M)$ даже не перечислимы (например, для кольца целых чисел $\mathbf{Z}$ или для поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$) — тогда нет надежды на эффективную аксиоматизацию.

Еще один важный аспект — это вычислительные затраты для разрешимых теорий: как много ресурсов (таких как время или память) может потребоваться разрешающему алгоритму? Эти задачи изучаются в теории вычислительной сложности, обширной области логики и информатики. Несмотря на активное развитие этой области в течение последних десятилетий, многие фундаментальные вопросы здесь остаются открытыми. К ним относится, например, знаменитая проблема о равенстве сложностных классов P и NP; в терминах логических теорий она может быть сформулирована так: можно ли проверять выполнимость формул логики высказываний за время, ограниченное некоторым полиномом от длины формулы?

Таким образом, в математической логике мы должны искать компромисс между выразительной силой и алгоритмическими свойствами формальных теорий. Полная гармония здесь невозможна. Отчасти компромисс достигается в модальных логиках.

3. Модальная логика

Эволюция этой области, находящейся на стыке философии, математики и информатики, очень подробно описана в обширной статье Голдблатта [33]. Вкратце отметим некоторые этапы этого развития.

Модальная логика как довольно скромная часть логики появилась в античные времена в рамках философии. Она нашла отражение в трудах многих знаменитых философов, начиная с Аристотеля (например, Оккама, Лейбница, Канта, Пирса и др.). Лишь в XX веке она приобрела свой основной технический инструментарий и оформилась как самостоятельная математическая дисциплина внутри математической логики. Наконец, широкое практическое применение она получила в конце прошлого века, став разделом информатики. Таким образом, модальная логика, возникшая для анализа различных философских категорий (в первую очередь — необходимости и возможности), пройдя через математическую формализацию, оказалась инструментом решения конкретных практических задач.

3.1. От модального синтаксиса — к семантике

По-видимому, первое определение модальных логик с помощью исчислений, т.е. описание каждой конкретной логики как множества теорем некоторого исчисления, было дано известным американским философом Кларенсом Льюисом [40].

До этого уже были различные попытки формализации модальностей ([41, 39]), однако они скорее касались выбора нотации и ее «содержательного» прочтения, без точных определений исчислений или семантики; история этого вопроса обсуждается в [33].

О двух самых известных исчислениях Льюиса (**S4** и **S5**) будет сказано ниже, а пока дадим определение простейшего модального языка — языка *пропозициональной одномодальной логики.*

Аналогично формулам классической (булевой) логики высказываний, модальные формулы строятся из счетного множества *пропозициональных переменных* PV с помощью связок (и скобок). Имеются обычные двуместные связки $\vee$ (*дизъюнкция*), $\wedge$ (*конъюнкция*), $\to$ (*импликация*), $\leftrightarrow$ (*эквиваленция*), одноместная связка $\neg$ (*отрицание*). К ним добавляются дополнительные одноместные модальные связки $\Diamond$ (*ромб*) и $\Box$ (*бокс*); их традиционное прочтение — «возможно» и «необходимо». Кроме того, нам будет удобно иметь обозначения для пропозициональных констант (или нульместных связок) $\bot$ (*ложь*) и $\top$ (*истина*): $\bot$ обозначает $(p_0 \wedge \neg p_0)$, $\top$ обозначает $(p_0 \vee \neg p_0)$, где p_0 — фиксированная пропозициональная переменная.

Начиная с Льюиса, был построен целый ряд исчислений, аксиоматизирующих «модальные законы». Первоначально «необходимость» и «возможность» понимались интуитивно. Но интуитивная точка зрения не позволяет решить, какие логические законы следует считать верными. Например, непонятно, верна ли импликация $\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$, т.е. если возможно, что что-то возможно, то возможно ли это?

По-видимому, ответ зависит от того, как мы понимаем «возможность». В частности, $\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$ верно, если $\Diamond\varphi$ понимать, как «когда-нибудь может произойти φ»; но эта импликация неверна, если $\Diamond\varphi$ понимается, как «завтра может произойти φ».

Итак, мы не можем однозначно ответить на вопрос, какие же логические свойства модальностей следует считать верными: для этого надо формализовать интуитивное понимание истинности. Приближенные ответы можно дать двумя способами.

С одной стороны, мы можем постулировать небольшое число интуитивно верных законов в качестве аксиом некоторого исчисления, и тогда теоремы этого исчисления также окажутся «верными». Именно по этому пути пошел Льюис и другие его современники.

С другой стороны, можно определить понятие модели нашего языка (т. е. задать семантику) и выяснить, является ли данное высказывание общезначимым, т.е. истинным во всех моделях. Если нет — то в каких именно моделях оно верно? При этом вопрос о правильности нашего формального определения семантики остается открытым.

К 1950-м годам было предложено несколько модальных семантик (разной степени строгости). Самая известная из них — реляционная *семантика Крипке*; она дает интуитивно ясное и математически точное понимание модального языка.

3.2. Семантика Крипке

Определение 1. *Шкалой Крипке*, или просто *шкалой*[12], называется пара $F = (W, R)$, где W — непустое множество и R — бинарное отношение на W. *Оценкой* на шкале F называется отображение $V : PV \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ (где $\mathcal{P}(W)$ — множество всех подмножеств W), т.е. $V(p) \subseteq W$ для любой переменной $p \in PV$.

Модель Крипке M — это шкала с оценкой. Множество W называется *носителем* F (и M), а отношение R — *отношением достижимости* в F (и M).

Элементы носителя по традиции называются *возможными мирами* (термин Лейбница), но в современных работах их называют также «точками», «состояниями», «моментами времени» (если речь идет о временны́х модальностях). Главное отличие семантики Крипке от булевой семантики классических формул — значение каждой формулы в модели Крипке зависит не только от самой модели, но и от возможного мира: то, что истинно в одном мире, может оказаться ложным в другом. Это совершенно естественно в повседневной логике.

Формально истинность модальных формул в точках модели Крипке $M = (F, V)$ определяется индукцией по длине формулы (запись $M, w \vDash \varphi$ читается как *«формула φ истинна в точке w модели M»*):

---

[12]Русский термин «шкала» в свое время появился как перевод английского «frame».

$$
\begin{array}{lcl}
M, w \vDash p & := & w \in V(p); \\
M, w \vDash \neg\varphi & := & M, w \nvDash \varphi; \\
M, w \vDash \varphi \vee \psi & := & M, w \vDash \varphi \text{ или } M, w \vDash \psi; \\
M, w \vDash \Diamond\varphi & := & \text{найдется } v, \text{ такое что } wRv \text{ и } M, v \vDash \varphi; \\
M, w \vDash \Box\varphi & := & \text{для всех } v, \text{ таких что } wRv, \text{ выполняется } M, v \vDash \varphi
\end{array}
$$

(символ := читается как «по определению означает»).

Смысл этого определения такой: булевы связки в каждой точке понимаются, как в классической логике высказываний, возможность понимается как истинность в какой-то достижимой точке, а необходимость — как истинность в любой достижимой точке. Крипке при этом ссылался на Лейбница, у которого была похожая семантика (без формальных уточнений), но с универсальным отношением достижимости, т.е. достижимой считалась любая точка. Таким образом, с точки зрения Лейбница, необходимость означает истинность во всех мирах, а возможность — в некоторых (см. далее раздел 5.4).

Другим предшественником Крипке можно считать Диодора Кроноса (начало III века до Р.Х.), который в своем «главном аргументе» по существу использовал временну́ю интерпретацию модальностей: возможно — то, что есть или когда-нибудь будет, а соответственно, необходимо — то, что есть и всегда будет. В семантике Крипке такое понимание модальностей соответствует случаю, когда точки — это моменты времени, а отношение достижимости — (нестрогое) предшествование во времени.

Отметим, что никаких априорных ограничений на свойства отношения R мы не накладываем. С математической точки зрения, также совершенно не важна природа точек модели; мы можем считать их «возможными мирами» (как в работах Крипке), «моментами времени» (как в работах по временной логике), «состояниями вычислительной системы» (как в работах по динамическим логикам).

Содержательная интерпретация «высказываний» p при таком подходе не рассматривается: для нас неважно, что́ именно означает переменная p, а интересует нас лишь значение $V(p)$.

Говорят, что формула φ *общезначима* в шкале (W, R), если она истинна при любой оценке в любой точке; в этом случае мы пишем $(W, R) \vDash \varphi$.

Заметим теперь, что определение истинности дает нам продолжение функции V на все формулы, если положить

$V(\varphi) = \{w \mid M, w \vDash \varphi\}$. Вообще, вместо определения истинности в точке, можно сразу определить значения $V(\varphi)$ по индукции:

$$\begin{array}{lcl} V(\neg\varphi) & := & -V(\varphi); \\ V(\varphi \vee \psi) & := & V(\varphi) \cup V(\psi); \\ V(\Diamond\varphi) & := & R^{-1}(V(\varphi)); \\ V(\Box\varphi) & := & -R^{-1}(-V(\varphi)). \end{array}$$

Здесь $\cup, -$ — теоретико-множественные операции объединения и дополнения (до W), а $R^{-1}(X)$ — *прообраз множества X по отношению R*:

$$R^{-1}(X) = \{u \mid \exists w \in X\ uRw\}.$$

Из определения $V(\varphi)$ видно, что можно ограничить возможные значения функции оценки V, разрешив ей принимать значения не во всем $\mathcal{P}(W)$, а лишь в каком-то меньшем семействе $\mathcal{V}$ подмножеств W. Но чтобы такое ограниченное определение имело смысл, нужны дополнительные условия:

- $X \in \mathcal{V} \Rightarrow -X \in \mathcal{V}$,
- $X, Y \in \mathcal{V} \Rightarrow (X \cup Y) \in \mathcal{V}$,
- $X \in \mathcal{V} \Rightarrow R^{-1}(X) \in \mathcal{V}$.

Таким образом, операции объединения и дополнения должны сохранять принадлежность множеств к $\mathcal{V}$. Тогда, конечно, сохранится и пересечение — так как $X \cap Y = -((-X) \cup (-Y))$, по закону Де Моргана. Поэтому, чтобы в $\mathcal{V}$ оценивались все наши формулы, $\mathcal{V}$ должно быть *булевой алгеброй.*

Кроме того, $\mathcal{V}$ должно быть устойчиво относительно взятия прообраза по R. Множество $\mathcal{V}$ с булевыми операциями и определенной выше функцией R^{-1} является примером *модальной алгебры* — понятия, играющего в модальной логике ту же роль, какую играют булевы алгебры в классической логике. Общее определение модальной алгебры будет дано ниже.

Шкала Крипке (W, R) вместе с множеством $\mathcal{V}$, удовлетворяющим этим условиям устойчивости, называется *обобщенной шкалой Крипке.* Обобщенные шкалы приводят к несколько иному варианту семантики Крипке; он менее нагляден, но иногда дает технические преимущества (мы обсудим их в разделе 3.5).

3.3. Пример модального исчисления

Определив семантику для формул некоторого языка, мы можем точно говорить об их истинности. С другой стороны, как уже отмечалось, семантика позволяет употреблять данный язык для описания математических структур.

Рассмотрим, например, формулы $p \to \Diamond p$ и $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Что они говорят про отношение достижимости? Используя определение, несложно проверить, что

$$\begin{array}{lcl} (W,R) \vDash p \to \Diamond p & \Leftrightarrow & R \text{ рефлексивно;} \\ (W,R) \vDash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p & \Leftrightarrow & R \text{ транзитивно.} \end{array}$$

Напомним, что отношение R *рефлексивно*, если xRx для всех точек x; *транзитивно*, если из xRy и yRz следует, что xRz.

На этих и многих других примерах можно увидеть, что формулы модальной логики выражают различные свойства отношения достижимости. Правда, в некоторых случаях свойства шкал Крипке, записываемые модальными формулами, нельзя выразить классическими формулами первого порядка. Хорошо известный в модальной логике пример такого рода — формула Лёба

$$\Box(\Box p \to p) \to \Box p,$$

которая выражает транзитивность и нётеровость[13] отношения достижимости.

И наоборот, некоторые достаточно простые условия на шкалы Крипке (как, например, иррефлексивность) не выражаются модальными формулами. Однако возникает идея, что классическая и модальная выразимости должны быть как-то связаны.

Связь эта изучалась достаточно глубоко на протяжении последних 50 лет. Она используется в двух направлениях. С одной стороны, для явно заданных модальных исчислений важно получать семантические описания. С другой стороны, для конкретной шкалы или даже класса шкал может быть полезным модальное описание, особенно когда классическое описание в логике первого порядка невозможно.

Оба эти аспекта оказались очень нетривиальными. К сожалению, нет общего рецепта для решения таких задач. Кроме феномена неполноты в модальной логике (см. ниже) возникают и другие препятствия: интересующее нас множество формул может оказаться неперечислимым. Так, например, недавний результат из работы [49] показывает,

[13] Это означает, что нет бесконечных последовательностей вида $x_0 R x_1 R x_2 \ldots$

что для вещественной плоскости с отношением достижимости по сторонам прямого угла (т.е. достижимыми из точки (x, y) являются все точки (x, y'), где $y' > y$, и все точки (x', y), где $x' > x$) множество всех общезначимых формул неперечислимо. Поэтому оно не может быть множеством теорем эффективно аксиоматизируемого исчисления (факт 3, см. выше).

Для примера рассмотрим теперь одно из построенных Льюисом[14] модальных исчислений, которое по традиции обозначается **S4**.

Определение 2. **S4** — множество теорем модального исчисления, которое содержит в качестве аксиом следующие три вида формул (где p, q — пропозициональные переменные):

(1) все классические пропозициональные тавтологии,

(2)
$$\begin{aligned}&\Box(p \to q) \wedge \Box p \;\to\; \Box q,\\ &\Diamond p \;\leftrightarrow\; \neg\Box\neg p,\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&\Diamond\Diamond p \;\to\; \Diamond p,\\ &p \;\to\; \Diamond p,\end{aligned}$$

и имеет правила вывода *Modus Ponens* (MP), *правило подстановки* (SUB), *правило усиления* (NEC):

$$\frac{\varphi, \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ \mathrm{MP} \qquad\qquad \frac{\varphi(p)}{\varphi(\alpha)}\ \mathrm{SUB} \qquad\qquad \frac{\varphi}{\Box\varphi}\ \mathrm{NEC}$$

В правиле подстановки формула $\varphi(\alpha)$ получается из $\varphi(p)$ заменой каждого вхождения переменной p на формулу α.

Первоначально логика **S4** предназначалась для формализации философских понятий необходимости и возможности. В дальнейшем она нашла разнообразные применения. В частности, оказалось, что для нее имеется следующая семантика.

Теорема 1. S4 — множество формул, общезначимых во всех транзитивных рефлексивных шкалах.

[14]Мы приводим равносильную формулировку **S4**, близкую к формулировке Гёделя [30].

(Доказательство этой и следующих двух теорем можно найти, например, в [25] и [22].)

Таким образом, для изучения «законов» **S4** можно исследовать формулы, общезначимые в транзитивных рефлексивных шкалах.

Справедливо и более сильное утверждение:

Теорема 2. Формула φ является теоремой **S4** (или, короче, $\varphi \in \mathbf{S4}$) $\Leftrightarrow$ φ общезначима во всех конечных транзитивных рефлексивных шкалах размера[15] не более $2^{|\varphi|}$, где $|\varphi|$ — длина формулы φ.

Отсюда следует алгоритмическая разрешимость **S4**: по данной формуле мы можем установить, является ли она теоремой **S4**.[16] При этом необщезначимые (невыводимые) формулы опровергаются в шкалах сравнительно небольшого размера. Теорема 2 дает не только разрешимость **S4**, но и позволяет априорно указать ограничение на используемые программой ресурсы (в зависимости от длины формулы). Дальнейшие дополнительные рассуждения доказывают такое ее следствие:

Теорема 3. **S4** PSPACE-полна[17].

Эта теорема впервые была доказана в [38]. Аналогичные свойства обнаруживают и многие другие естественно возникающие модальные исчисления. Связь модальной логики и информатики по существу началась с этой теоремы.

3.4. Нормальные модальные логики

Как мы заметили выше, две из аксиом **S4** (группа (3)) выражают транзитивность и рефлексивность шкалы (иными словами, они *опре-*

---

[15] Под размером шкалы мы понимаем мощность ее носителя.

[16] Вообще, всякое конечно аксиоматизируемое модальное исчисление C, полное относительно некоторого класса конечных шкал, оказывается разрешимым (теорема Харропа). Действительно, с одной стороны, перечислимо множество теорем C. С другой стороны, мы можем эффективно проверить, общезначимы ли все теоремы C на данной конечной шкале: вместо всех теорем достаточно проверить лишь конечное число аксиом. Отсюда следует перечислимость множества всех невыводимых в C формул. Разрешимость C теперь получается по известной теореме Поста [13].

[17] Напомним, что разрешимость в классе PSPACE означает существование разрешающего алгоритма с полиномиальным (относительно длины входа) ограничением на используемую память. PSPACE-полнота алгоритмической проблемы означает дополнительно, что любая задача из класса PSPACE сводится к ней за полиномиальное время. См. более подробно, например, в [9] или [7].

деляют класс всех транзитивных рефлексивных шкал). Однако имеет смысл рассматривать исчисления и без этих аксиом.

Определение 3. *Пропозициональной нормальной модальной логикой* называется множество теорем исчисления, содержащего аксиомы групп (1), (2) из определения 2 и правила вывода MP, NEC и SUB.

В дальнейшем слово «нормальная» мы будем опускать. Наименьшая модальная логика обозначается **K**. Она задается исчислением, в котором нет других аксиом, кроме (1) и (2) (а правила — как в определениях 2 и 3). Для всех других модальных логик нужны дополнительные аксиомы. Мы будем обозначать логику с множеством дополнительных аксиом Ψ через $\mathbf{K}+\Psi$. (Она может совпасть с множеством вообще всех формул — тогда логика оказывается *противоречивой*.)

Теорема 4 (теорема корректности для семантики Крипке). Множество всех формул, общезначимых в шкале Крипке F, образует модальную логику (в смысле определения 3).

Для доказательства достаточно заметить, что аксиомы **K** общезначимы в любой шкале. Также несложно проверить, что множество всех формул, общезначимых в данной шкале, замкнуто относительно правил MP, NEC и SUB (для MP, NEC это совсем очевидно; проверка SUB — небольшое упражнение).

Следствие 5. Множество всех формул, общезначимых в классе шкал Крипке $\mathcal{F}$ (т.е. во всех шкалах из $\mathcal{F}$), образует модальную логику.

Это множество называется *(модальной) логикой класса* $\mathcal{F}$ и обозначается $ML(\mathcal{F})$. Логики такого вида, т.е. логики классов шкал, называются *полными* (точнее, полными в семантике Крипке). Вместо «логика класса $\mathcal{F}$» мы также говорим: «*логика, полная относительно* $\mathcal{F}$».

Свойства логики **K** во многом аналогичны свойствам **S4**, но теперь речь идет о классе всех шкал. А именно:

Теорема 6.

(1) **K** — логика класса всех шкал, а также класса всех конечных шкал.

(2) $\varphi \in \mathbf{K} \iff \varphi$ общезначима во всех конечных шкалах размера не более $2^{|\varphi|}$.

(3) **K** разрешима и, более того, PSPACE-полна.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [25] или [22].

Все ли нормальные логики, определенные как исчисления, обладают столь же хорошими свойствами? Все ли шкалы обладают хорошими логиками? Ответ в обоих случаях отрицательный.

Оказывается, не все нормальные модальные логики полны. Можно привести пример множества аксиом Ψ (и даже состоящего из одной формулы), для которого $\mathbf{K} + \Psi$ не является логикой никакого класса шкал. (Вероятно, самый простой такой пример — это логика $\mathbf{K} + \Box(\Box p \leftrightarrow p) \to \Box p$; см., например, [31].)

Хотя по теореме корректности всякий класс шкал Крипке приводит к некоторому модальному исчислению, этот факт ничего нам не дает, если мы желаем проверять доказательства в нашем исчислении. Если логика класса неперечислима, то для нее никакого исчисления в разумном смысле мы не получим. Типичная ситуация — именно такая: существует континуум различных таких логик (и даже содержащих **S4**) [27]. Из этого немедленно следует, что не все нормальные логики можно аксиоматизировать так, чтобы было возможно эффективно проверять доказательства: действительно, перечислимых логик — счетное число[18]. Однако, как отмечалось в разделе 3.3, дело обстоит еще хуже: логика одной явно заданной шкалы может оказаться неперечислимой.

3.5. Алгебраическая семантика

Как мы отметили, существуют модальные логики, которые неполны в семантике Крипке. Однако имеется другая, алгебраическая семантика модальных формул, в которой все модальные логики оказываются полными. Эта семантика возникла в 1930-е годы, вскоре после появления первых модальных исчислений. Здесь модальные формулы интерпретируются в модальных алгебрах.

Мы предполагаем, что читатель знаком с определением и простейшими свойствами булевых алгебр (см., например, [11]). Булевы операции мы здесь обозначаем так же, как логические связки, т.е. $\vee, \wedge, \neg, \bot, \top$. *Модальной алгеброй* называется булева алгебра с допол-

[18] Любую программу можно сохранить в файл, а содержание файла кодируется натуральным числом.

нительными операциями $\Box$ и $\Diamond$, которые удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned}
&\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b;\\
&\Diamond\bot = \bot;\\
&\Box a = \neg\Diamond\neg a.
\end{aligned}$$

Например, модальная алгебра возникает из топологического пространства как булева алгебра всех его подмножеств с операциями *замыкания* и *внутренности*. Операция замыкания $\Diamond$ отображает множество в его замыкание (множество всех точек прикосновения). Операция внутренности $\Box$ отображает множество в его открытое ядро (или внутренность), т.е. множество всех внутренних точек.

Модальная алгебра получается также из шкалы Крипке (W, R): надо взять булеву алгебру всех подмножеств W с операцией прообраза, отображающей X в $R^{-1}(X)$, в качестве $\Diamond$ и операцией $\Box X = -R^{-1}(-X)$. Множество $\mathcal{V}$, задающее обобщенную шкалу Крипке, тоже составляет модальную алгебру (см. раздел 3.2).

Модальные формулы можно понимать как термы в сигнатуре модальных алгебр. Поэтому можно говорить об их истинности в модальных алгебрах:

Определение 4. Модальная формула φ *истинна* в модальной алгебре A, если в A выполнено тождество $\varphi = \top$.

Теорема 7 (теорема корректности для алгебраической семантики). Множество всех формул, истинных в модальной алгебре A, образует нормальную модальную логику.

Она называется *логикой алгебры* A.

В алгебраической семантике все нормальные логики оказываются полными:

Теорема 8. Для любой модальной логики L существует алгебра $Lind(L)$, логика которой есть L.

$Lind(L)$ называется *алгеброй Линденбаума–Тарского* логики L; она строится стандартным образом из модальных формул (как множество классов эквивалентности по отношению $L \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$).

Благодаря алгебраической полноте модальные логики в точности соответствуют *многообразиям модальных алгебр*, т.е. классам алгебр, которые задаются системами тождеств. Исследование модальных логик по существу равносильно изучению таких многообразий, и здесь применимы методы универсальной алгебры.

Систематическое изучение модальных алгебр началось с 1940-х годов в работах Тарского, Маккинси, Йонссона и др. В работе [35] Йонссоном и Тарским была доказана теорема о представлении для модальных алгебр — обобщение знаменитой теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр. Из теоремы Йонссона–Тарского следует полнота нормальных логик относительно обобщенных шкал Крипке (см. раздел 3.2): всякая модальная логика совпадает с множеством формул, общезначимых в некоторой обобщенной шкале.

Многие свойства модальных логик можно сформулировать на алгебраическом языке. Отметим, например, следующее свойство логики L: среди всех формул, построенных с помощью данного конечного множества переменных, имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных в L. Это свойство называется *локальной табличностью*. Оно тесно связано с разрешимостью: если локально табличная логика задается исчислением с конечным числом аксиом, то она разрешима. В частности, классическая логика высказываний обладает этим свойством, модальные логики **K**, **S4** — не обладают, а логики **S5** и **DL** (см. ниже) — обладают. Локальная табличность логики соответствует следующему свойству локальной конечности алгебраического многообразия: всякая конечно порожденная алгебра многообразия конечна. Эта тема интенсивно исследуется в последние годы [20].

3.6. Другие семантики

Помимо хороших синтаксических и алгоритмических свойств у модальных логик имеется еще одно достоинство: богатство их моделей (семантик).

Для модальных логик высказываний, помимо семантики Крипке и алгебраической семантики, имеются еще топологическая (окрестностная), а также семантика доказуемости. Остановимся на них кратко.

В разделе 3.5 мы отмечали, что с каждым топологическим пространством связана модальная алгебра. Все такие алгебры удовлетворяют аксиомам **S4**; их детальное исследование было начато Маккинси и Тарским [42]. На этом пути получается *топологическая семантика* логик, содержащих **S4**. Ее обобщением служит *окрестностная семантика*, предложенная Монтегю и Скоттом; она корректна уже для всех нормальных (и даже для более слабых) модальных логик. В этой семантике необходимость понимается как истинность в некоторой окрестности (данного возможного мира); подробнее см. [44], [24].

В последнее время взаимодействие теории модальных логик с топологией активно развивается. В более общем контексте, модальные логики находят применение в области пространственных логик [17].

Идея использовать модальные операторы для описания доказуемости и непротиворечивости была предложена Гёделем в 1930-х годах [30]. Однако реализация этой идеи началась гораздо позже, после работы Соловея [50]. В ней была описана полная логика арифметической доказуемости, логика Гёделя–Лёба **GL** (она равна $\mathbf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p)$). В настоящее время модальные логики — важный инструмент в теории доказательств.

4. Стандартный перевод

Семантика формального языка предлагает содержательное осмысление его выражений. В современной лингвистике принято описывать семантику как «толкование» языковых выражений текстов, т.е. перевод их на другой язык («язык смыслов») (см. [1]). Так можно представить и семантику модальных формул: она дает их перевод на язык классической логики.

Для семантики Крипке таким образом получается стандартный перевод модальных формул в классические формулы первого порядка. Он был введен Й. Ван Бентемом в начале 1970-х годов (и несколько раньше — Г.Е. Минцем для интуиционистских формул) (см. [19]).

Напомним его определение. Рассмотрим классические формулы 1-го порядка, построенные из счетного множества одноместных предикатных букв $\{P_1, P_2, \dots\}$ и одной двуместной предикатной буквы R. Множество всех таких формул обозначим через $\mathcal{L}_1$; а через $\mathcal{L}_0$ обозначим множество всех формул из $\mathcal{L}_1$, не содержащих $\{P_1, P_2, \dots\}$. С другой стороны, рассмотрим пропозициональные модальные формулы, как и выше, причем зафиксируем множество пропозициональных переменных $PV = \{p_1, p_2, \dots\}$. Каждая модальная формула φ переводится в классическую формулу $\varphi^\star(t)$ из $\mathcal{L}_1$ с одним параметром t, согласно следующим правилам:

$$
\begin{aligned}
&p_i^\star(t) := P_i(t),\\
&(\neg\varphi)^\star(t) := \neg\varphi^\star(t),\\
&(\varphi \to \psi)^\star(t) := \varphi^\star(t) \to \psi^\star(t),\\
&(\varphi \wedge \psi)^\star(t) := \varphi^\star(t) \wedge \psi^\star(t),\\
&(\varphi \vee \psi)^\star(t) := \varphi^\star(t) \vee \psi^\star(t),
\end{aligned}
$$

$$(\Box\varphi)^\bigstar(t) := \forall x\,(R(t,x) \to \varphi^\bigstar(x)),$$
$$(\Diamond\varphi)^\bigstar(t) := \exists x\,(R(t,x) \wedge \varphi^\bigstar(x)),$$

где $\varphi^\bigstar(x)$ получается из $\varphi^\bigstar(t)$ заменой t на x (с переименованием связанных переменных, если потребуется).

Каждой модели Крипке $M = (F,V)$ на шкале $F = (W,R)$[19] отвечает классическая структура 1-го порядка $M^\bigstar = (W,R,V(p_1),V(p_2),\dots)$, интерпретирующая $\mathcal{L}_1$[20]. Следующая простая лемма описывает логическую связь M и $M^\bigstar$.

Лемма 9.

(1) Пусть $M = (F,V)$ — модель Крипке на шкале $F = (W,R)$. Тогда для всех $a \in W$, для любой модальной формулы φ,

$$M, a \vDash \varphi \;\Leftrightarrow\; M^\bigstar \vDash \varphi^\bigstar(a).$$

(2) Для любой шкалы F, для любой модальной формулы φ

$$F \vDash \varphi \;\Leftrightarrow\; \forall V\ (F,V)^\bigstar \vDash \forall t\,\varphi^\bigstar(t).$$

Доказательство (1) проводится индукцией по построению формулы φ; (2) легко получается из (1).

Поэтому во многих случаях мы можем рассматривать пропозициональные модальные логики как фрагменты классических теорий первого порядка. А именно, пусть Σ — некоторое множество предложений из $\mathcal{L}_0$, $Mod(\Sigma)$ — класс всех его моделей (в классическом смысле). Ясно, что мы можем отождествить их со шкалами Крипке; тогда возникает модальная логика $ML(Mod(\Sigma))$.

С другой стороны, Σ — подмножество $\mathcal{L}_1$, и у него имеются модели в сигнатуре $\{R, P_1, P_2, \ldots\}$. Очевидно, что все эти модели имеют вид $(F,V)^\bigstar$, где $F \in Mod(\Sigma)$. По классической теореме Гёделя о полноте получаем:

Теорема 10. $\varphi \in ML(Mod(\Sigma)) \;\Leftrightarrow\; \Sigma \vdash \forall t\,\varphi^\bigstar(t)$ (в классическом исчислении предикатов).

---

[19] Строго говоря, отношение в F не следует обозначать той же буквой R, которая используется в $\mathcal{L}_1$. Но мы этим пренебрегаем.

[20] Это означает, что R (в языке) соответствует R в $M^\bigstar$, а каждое P_i понимается как принадлежность к $V(p_i)$.

Отсюда следует, в частности, что если Σ конечно, то $ML(Mod(\Sigma))$ погружается в классическое исчисление предикатов:

Следствие 11. Если Σ конечно, то

$$\varphi \in ML(Mod(\Sigma)) \quad \Leftrightarrow \quad \vdash \bigwedge \Sigma \to \forall t\, \varphi^{\star}(t).$$

Доказательство. Из теоремы 10 и теоремы о дедукции. □

Следствие 12. Если Σ конечно (или даже бесконечно, но перечислимо), то логика $ML(Mod(\Sigma))$ перечислима.

Доказательство. Чтобы перечислить эту логику, мы должны перечислить теоремы классической теории с множеством аксиом Σ, найти те из них, которые имеют вид $\forall t\, \varphi^{\star}(t)$, и восстановить соответствующие модальные формулы φ. □

Здесь возникает естественный вопрос: если модальные логики погружаются в обычное исчисление предикатов, то зачем вообще их изучать отдельно? Казалось бы, классическая логика первого порядка хорошо разработана, и ее основные свойства давно известны.

Но не так все просто. Во-первых, далеко не все модальные логики полны относительно классов вида $Mod(\Sigma)$ — контрпримером может служить логика доказуемости **GL** (см. разделы 3.6, 3.3). Во-вторых, даже для «хороших» модальных логик пришлось развивать новые методы: классическая логика работает с другим, более богатым языком и другими моделями. Говоря совсем упрощенно, классическая логика может иногда понять модальную логику, но не всегда может ей помочь.

5. Логика неравенства

В качестве примера рассмотрим теперь *модальную логику неравенства.* Результаты о полноте, разрешимости и сложности для нее известны достаточно давно ([47], [48], [46]). Чтобы продемонстрировать базовую технику модальной логики, мы приведем их вместе с доказательствами.

Для множества X пусть $\neq_X$ обозначает отношение неравенства на X, т.е. формально — множество пар $\{(x, y) \mid x, y \in X,\ x \neq y\}$.

Логику неравенства $\mathbf{L}_{\neq}$ определим семантически — как логику класса шкал

$$\mathbf{L}_{\neq} := ML\{(X, \neq_X) \mid X \text{ — непустое множество}\}.$$

5.1. Полная аксиоматика

Положим

$$\mathbf{DL} := \mathbf{K} + \{p \to \Box\Diamond p,\ \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \vee p\}$$

и покажем, что $\mathbf{L}_{\neq} = \mathbf{DL}$.

Сначала опишем $\mathbf{DL}$-шкалы, т.е. шкалы, где общезначима логика $\mathbf{DL}$ (в силу теоремы корректности это равносильно общезначимости двух дополнительных аксиом):

Предложение 13. Для шкалы $F = (W, R)$

- $F \vDash p \to \Box\Diamond p \ \Leftrightarrow\ R$ симметрично,
- $F \vDash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \vee p \ \Leftrightarrow\ \forall x \forall y \forall z\, (xRyRz \ \Rightarrow\ xRz \vee x = z)$.

Предложение 14. $(X, \neq_X)$ является $\mathbf{DL}$-шкалой для любого непустого X.

Полноту логики $\mathbf{DL}$ в семантике Крипке мы докажем с помощью *канонической модели*.

Множество формул Γ называется *противоречивым* (относительно логики $\mathbf{DL}$), если $\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) \in \mathbf{DL}$ для некоторых $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \Gamma$; в противном случае Γ называется *непротиворечивым* (опять же, относительно $\mathbf{DL}$). Множество формул Γ называется *максимальным*, если оно непротиворечиво, а любое его собственное расширение оказывается противоречивым.

Введем следующее обозначение: если Γ — множество формул, то $\Diamond\Gamma := \{\Diamond\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$.

Канонической шкалой логики $\mathbf{DL}$ называется шкала $F_{\mathbf{DL}} = (W_{\mathbf{DL}}, R_{\mathbf{DL}})$, где $W_{\mathbf{DL}}$ — множество всех максимальных множеств, а $R_{\mathbf{DL}}$ определяется так:

$$\Gamma\, R_{\mathbf{DL}}\, \Gamma' \ :=\ \Diamond\Gamma' \subseteq \Gamma.$$

Каноническая модель $M_{\mathbf{DL}} := (F_{\mathbf{DL}}, \theta_{\mathbf{DL}})$ логики $\mathbf{DL}$ — это ее каноническая шкала с оценкой $\theta_{\mathbf{DL}}$, заданной так:

$$\theta_{\mathbf{DL}}(p) := \{\Gamma \in W_{\mathbf{DL}} \mid p \in \Gamma\}.$$

Теорема 15 (Теорема о канонической модели).

(1) Для любого $\Gamma \in W_{\mathbf{DL}}$

$$\varphi \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathbf{DL}}, \Gamma \models \varphi.$$

(2)

$$\varphi \in \mathbf{DL} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathbf{DL}}, \Gamma \models \varphi \text{ для всех } \Gamma \in W_{\mathbf{DL}}.$$

На самом деле теорема о канонической модели верна для любой модальной логики — нужно лишь естественным образом изменить понятие непротиворечивого множества; доказательство можно найти, например, в [25]. Теорема о канонической модели — один из самых эффективных инструментов изучения полноты пропозициональных модальных логик. Следующие рассуждения доказывают полноту **DL**.

Предложение 16. $R_{\mathbf{DL}}$ обладает свойствами из предложения 13.

Доказательство. Нужно показать, что $R_{\mathbf{DL}}$ симметрично и

$$\forall x \forall y \forall z \, (x R_{\mathbf{DL}} y R_{\mathbf{DL}} z \Rightarrow x R_{\mathbf{DL}} z \vee x = z).$$

Проверим симметричность. Предположим, что $x R_{\mathbf{DL}} y$ для каких-то максимальных множеств формул x, y, и покажем, что $y R_{\mathbf{DL}} x$. Пусть $\varphi \in x$. Заметим, что формула $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ принадлежит **DL**. По теореме о канонической модели получаем, что, во-первых, $M_{\mathbf{DL}}, x \models \varphi$, и, во-вторых, формула $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ истинна в $M_{\mathbf{DL}}, x$. Поэтому $M_{\mathbf{DL}}, x \models \Box\Diamond\varphi$, из чего следует, что $M_{\mathbf{DL}}, y \models \Diamond\varphi$, и значит $\Diamond\varphi \in y$ (снова воспользовались теоремой 15). По определению, $y R_{\mathbf{DL}} x$.

Проверку второго свойства мы оставляем в качестве (чуть более сложного) упражнения. Детали можно найти в [48]. □

По предложению 13, получаем

Предложение 17. $F_{\mathbf{DL}} \models \mathbf{DL}$.

Теорема 18. **DL** полна в семантике Крипке.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы о канонической модели, **DL** не больше, чем логика своей канонической шкалы. С другой стороны, **DL** не меньше, поскольку она общезначима в $F_{\mathbf{DL}}$. Отсюда мы получаем полноту и, более того,— полноту относительно $F_{\mathbf{DL}}$. □

Вообще, любая логика, общезначимая в своей канонической шкале, полна в семантике Крипке. Такие логики называются *каноническими*. Имеется замечательный результат: каноничность логик, заданных аксиомами специального вида — так называемыми формулами Салквиста. Две аксиомы логики **DL**, а также формулы рефлексивности и транзитивности являются формулами Салквиста. Отсюда, в частности, следует полнота логики **S4**. Точную формулировку и доказательство теоремы Салквиста можно найти, например, в [25].

Для дальнейшего нам потребуется следующее свойство полных логик. Рассмотрим шкалу $F = (W, R)$. *Сужением* R *на* $V \subseteq W$ называется отношение $R{\restriction}V = R \cap (V \times V)$, т.е. для любых $y, z \in V$ имеем $y\,(R{\restriction}V)\,z \iff yRz$. Для $x \in W$ положим $R(x) = \{y \mid xRy\}$; для $V \subseteq W$, положим $R(V) = \{y \mid \exists x \in V\ xRy\}$. *Конусом шкалы* F *с корнем* x называется шкала $(W_x, R{\restriction}W_x)$, где

$$W_x = \{x\} \cup R(x) \cup R(R(x)) \cup \ldots$$

Хорошо известен следующий факт.

Предложение 19. Логика шкалы равна пересечению логик всех ее конусов.

Из этого следует

Предложение 20. Полная в семантике Крипке логика является логикой класса конусов ее шкал.

Вернемся к логике **DL**. Шкала (W, R) такая, что xRy для любых неравных x и y, называется *кластером*. Пример кластера — любая шкала вида $(X, \neq_X)$. Очевидно, кластеры являются **DL**-шкалами.

Предложение 21. Любой конус **DL**-шкалы является кластером. И наоборот, всякий кластер является конусом (с корнем в любой из своих точек).

Из этого следует, что

Предложение 22. **DL** полна относительно кластеров.

Наконец, чтобы установить полноту **DL** относительно шкал с неравенством, воспользуемся конструкцией известной как p-морфизм.

Определение 5. Рассмотрим шкалы $F = (W, R)$, $G = (V, R)$ и отображение $f : W \to V$.

f *монотонно*, если для любых $x, y \in W$, из xRy следует $f(x)Sf(y)$;

f обладает свойством *поднятия*, если для любых $x \in W$, $z \in V$ таких, что $f(x)Sz$, найдется $y \in R(x)$ такой, что $f(y) = z$.

Если f сюръективно, монотонно и обладает свойством поднятия, то f называется *p-морфизмом шкалы F на шкалу G*; запись $F \twoheadrightarrow G$ означает, что существует p-морфизм F на G.

Предложение 23 (Лемма о p-морфизме, см., например, [25]). Если $F \twoheadrightarrow G$ и $F \vDash \varphi$, то $G \vDash \varphi$.

Теорема 24. $\mathbf{DL} = \mathbf{L}_{\neq}$.

Доказательство. В предложении 22 мы установили, что $\mathbf{DL}$ — логика класса всех кластеров. Этот класс шире, чем класс шкал вида $(X, \neq_X)$, поэтому $\mathbf{DL} \subseteq \mathbf{L}_{\neq}$.

Проверим обратное включение. Покажем, что для всякого кластера $F = (W, R)$ существует шкала $G = (X, \neq_X)$ такая, что $G \twoheadrightarrow F$. Пусть V состоит из всех рефлексивных точек шкалы F. Положим $X = W \cup V'$, где V' — какое-то равномощное V множество, состоящее из точек, не принадлежащих W. Пусть i — взаимно-однозначное отображение V' на V. Определим отображение $f : X \to W$, положив $f(v) = v$ для $v \in W$ и $f(v) = i(v)$ для $v \in V'$. Несложно увидеть, что f — искомый p-морфизм.

Теперь пусть формула ψ общезначима во всех шкалах вида $(X, \neq_X)$. Тогда она общезначима в F по лемме о p-морфизме. В силу предложения 22, ψ является теоремой $\mathbf{DL}$. □

5.2. Разрешимость и сложность

Теорема 25. $\mathbf{DL}$ — логика класса конечных шкал вида $(X, \neq_X)$. Более того, $\varphi \in \mathbf{DL} \;\Leftrightarrow\; \varphi$ общезначима во всех конечных шкалах вида $(X, \neq_X)$, размер которых меньше $2|\varphi|$.

Доказательство. Очевидно, что логика конечных шкал вида $(X, \neq_X)$ включает $\mathbf{DL}$.

Чтобы доказать обратное включение, покажем, что на конечных кластерах опровергаются все «лишние» формулы. Пусть формула φ не является теоремой $\mathbf{DL}$. В силу теоремы 24, φ не общезначима в некоторой шкале $F = (W, \neq_W)$. Построим конечную шкалу $F_0 = (X, \neq_X)$, в которой не общезначима φ.

При некоторой оценке V в некоторой точке F формула φ ложна: $M, x \models \neg\varphi$, где $M = (F, V)$. Пусть φ' получается из φ заменой всех вхождений $\Box$ на $\neg\Diamond\neg$. Очевидно, $M, x \models \neg\varphi'$. Пусть теперь $\Psi = \{\Diamond\alpha_1, \dots, \Diamond\alpha_n\}$ — все подформулы φ', начинающиеся с $\Diamond$. Для каждой формулы α_i определим $V_i \subseteq W$ как множество тех точек модели M, в которых истинна α_i. Пусть U_i — подмножество V_i, определенное так: если V_i содержит не более двух элементов, то полагаем $U_i = V_i$; в противном случае выберем произвольно $a, b \in V_i$ и положим $U_i = \{a, b\}$. Все множества U_i вместе с точкой x будут составлять носитель X новой модели: $X = U_1 \cup \dots \cup U_n \cup \{x\}$. Поскольку n меньше, чем длина формулы φ, X содержит менее $2|\varphi|$ элементов. В шкале $F_0 = (X, \neq)$ определим оценку V_0, положив $V_0(p) = V(p) \cap X$; положим $M_0 = (F_0, V_0)$.

В силу этого построения, для любой точки $y \in X$ и любой переменной p имеем

$$M_0, y \models p \;\Leftrightarrow\; M, y \models p.$$

Нетрудно проверить, что эта эквивалентность имеет место для любой подформулы ψ формулы φ' (индукцией по длине формулы)

$$M_0, y \models \psi \;\Leftrightarrow\; M, y \models \psi.$$

Проверим случай модальности: $\psi = \Diamond\alpha_i$.

Если $M_0, y \models \Diamond\alpha_i$, то $M_0, y' \models \alpha_i$ для некоторого $y' \neq y$; по предположению индукции, $M, y' \models \alpha_i$; следовательно, $M, y \models \Diamond\alpha_i$. Обратно, предположим, что $M, y \models \Diamond\alpha_i$ и покажем, что $M_0, y \models \Diamond\alpha_i$. Заметим, что в данном случае V_i непусто, а потому U_i непусто; более того, оно содержит точку y', отличную от y. Точка y' принадлежит X, и одновременно $M, y' \models \alpha_i$ в силу определения U_i. По предположению индукции, $M_0, y' \models \alpha_i$, и поэтому $M_0, y \models \Diamond\alpha_i$, что и требовалось.

Поскольку $M, x \not\models \varphi'$, из доказанной эквивалентности следует, что $M_0, y \not\models \varphi'$, и поэтому $M_0, y \not\models \varphi$. Следовательно, $F_0 \not\models \varphi$. $\Box$

Теорема 26. **DL** разрешима и, более того, coNP-полна[21].

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 25. Разрешимость следует из полноты относительно конечных шкал и наличия у **DL** конечной аксиоматики (см. раздел 3.3). Кроме того, всякая нетеорема логики **DL** опровергается на конечной шкале $(X, \neq_X)$, размер которой полиномиально ограничен. Чтобы опровергнуть формулу, нужно «угадать» размер X и оценку тех переменных, которые входят в формулу.

5.3. Логика неравенства на бесконечном множестве

Как мы установили выше, **DL** — логика класса всех шкал вида $(X, \neq_X)$. Теперь мы рассмотрим логику одной такой бесконечной шкалы. Как мы увидим, она не зависит от X.

Для $n \geq 0$ рассмотрим формулы

$$Ad_n := \Diamond p_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond p_n \to \Diamond(\Diamond p_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond p_n)$$

(как обычно, конъюнкция $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ при $n = 0$ понимается как истина $\top$; поэтому Ad_0 равносильна формуле $\Diamond\top$).

Пусть $\mathcal{C}$ обозначает класс всех конечных кластеров, содержащих хотя бы одну рефлексивную точку.

Теорема 27. Пусть X — некоторое бесконечное множество. Тогда

(1) $ML(X, \neq_X) = ML(\mathcal{C})$. Более того, $(X, \neq_X) \vDash \varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi$ общезначима во всех конечных кластерах, содержащих хотя бы одну рефлексивную точку, размер которых не превосходит $2|\varphi|$.

(2) $ML(X, \neq_X) = \mathbf{DL} + \{Ad_n \mid n \geq 0\}$.

Следствие 28. Для любых бесконечных X, Y, $ML(X, \neq_X) = ML(Y, \neq_Y)$.

[21]Проблема разрешения для Y принадлежит классу coNP, если проблема разрешения для дополнения Y принадлежит классу NP. Напомним, что NP — класс проблем, которые можно решить за полиномиальное время на недетерминированной машине Тьюринга. Проблема coNP-трудна, если любая задача из этого класса сводится к ней за полиномиальное время; проблема coNP-полна, если она принадлежит классу coNP и одновременно с этим coNP-трудна. См. более подробно, например, в [9].

Заметим, что проблема разрешения для любой непротиворечивой модальной логики coNP трудна: к ней тривиальным образом сводится проблема разрешения для логики высказываний.

Следствие 29. Пусть X — непустое множество. Тогда проблема общезначимости в шкале $(X, \neq_X)$ разрешима и coNP-полна.

Для доказательства теоремы 27 нам понадобится ряд вспомогательных фактов.

Предложение 30. $(W, R) \vDash Ad_n \ \Leftrightarrow$

$$\forall x \forall y_1 \ldots \forall y_n \, (xRy_1 \wedge \ldots \wedge xRy_n \ \Rightarrow\ \exists z (xRz \wedge zRy_1 \wedge \ldots \wedge zRy_n)).$$

Доказательство. Несложное упражнение. □

Положим $L = \mathbf{DL} + \{Ad_n \mid n \geq 0\}$.

Предложение 31. Пусть F — конус. Тогда F является L-шкалой $\Leftrightarrow$ F — бесконечный кластер, или кластер, содержащий рефлексивную точку.

Доказательство. По предложению 30. □

Логика L, как и логика $\mathbf{DL}$, является канонической (это следует, например, из того, что формулы Ad_n являются формулами Салквиста): $F_L \vDash L$.

Лемма 32. Пусть F — конус в канонической шкале F_L. Тогда F содержит рефлексивную точку.

Доказательство. Предположим, что $F = (W, R)$ — бесконечный кластер. Рассмотрим множество формул $\Psi = \{\Diamond\varphi \mid \exists x \, (\varphi \in x \in W)\}$. Покажем, что оно непротиворечиво относительно L. Пусть $\Psi_0 = \{\Diamond\varphi_1, \ldots, \Diamond\varphi_n\}$ — какое-то конечное подмножество Ψ. По построению, существуют точки $y_1, \ldots, y_n$ такие, что $\varphi_i \in y_i \in W$, $1 \leq i \leq n$. В бесконечном W существует точка $x \in W$, отличная от $y_1, \ldots, y_n$. Поскольку xRy_i для всех i, в канонической модели в x истинна формула $\Diamond\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\varphi_n$, поэтому Ψ_0 непротиворечиво относительно L. Из этого следует непротиворечивость Ψ.

Всякое непротиворечивое множество может быть расширено до максимального (это утверждение называется леммой Линденбаума). Поэтому $\Psi \subseteq z$ для некоторого $z \in W_L$. Из определения множества Ψ (и определения отношения в канонической модели) следует, что zR_Ly для любой точки $y \in W$. Поскольку F — кластер и R_L симметрично, $z \in W$. Следовательно, zR_Lz. □

Теперь приведем доказательство теоремы 27.

Поскольку все аксиомы L общезначимы в шкале $(X, \neq_X)$, имеем $L \subseteq ML(X, \neq_X)$.

Несложно показать, что $(X, \neq_X) \twoheadrightarrow F$ для любой шкалы $F \in \mathcal{C}$, поэтому $ML(X, \neq_X) \subseteq ML(\mathcal{C})$.

Покажем, что $ML(\mathcal{C}) \subseteq L$. Предположим, что $\varphi \notin L$. Тогда формула φ опровергается в некотором конусе F шкалы F_L (это следует из теоремы о канонической модели и предложения 19). Для некоторой оценки V и некоторой точки x имеем $(F, V), x \vDash \neg\varphi$. В силу леммы 32, в шкале F существует рефлексивная точка y. Аналогично доказательству теоремы 25 можно построить кластер F_0, содержащий точку x, рефлексивную точку y и имеющий мощность не более $2|\varphi|$, в котором опровергается формула φ.

Тем самым, $L = ML(X, \neq_X) = ML(\mathcal{C})$, и теорема 27 доказана.

Заметим, что если $|X| = n + 1$, то $(X, \neq_X) \vDash Ad_i$ при $i < n$, но $(X, \neq_X) \nvDash Ad_n$. Из этого легко следует, что логика L не обладает конечной аксиоматикой, т.е. какое бы конечное множество формул Ψ мы ни выбрали, $L \neq \mathbf{K} + \Psi$. На самом деле верно следующее, более сильное, утверждение.

Теорема 33. Если $L = \mathbf{K} + \Psi$, то для любого m найдется формула из Ψ, содержащая более m различных переменных.

Доказательство. Предположим противное: пусть для некоторого m каждая формула из Ψ содержит не более m различных переменных. Рассмотрим шкалу $F = (X, \neq_X)$, где $X = \{0, \ldots, 2^m\}$, и шкалу $F' = (\{0, \ldots, 2^m - 1\}, R)$, где $xRy \iff x \neq y$ или $x = y = 0$. Несложное рассуждение показывает, что если формула ψ содержит не более m различных переменных, то $F \vDash \psi \iff F' \vDash \psi$ (детали можно найти в [51]). В шкале F опровергается формула Ad_{2^m}, поэтому F не L-шкала. Следовательно, в F опровергается некоторая формула $\varphi \in \Psi$. Так как φ содержит не более m различных переменных, она опровергается также и в шкале F'. С другой стороны, шкала F' принадлежит классу $\mathcal{C}$ из теоремы 27, поэтому в ней общезначима логика L, содержащая φ. Мы пришли к противоречию. $\square$

Исторические замечания

Теорема 24 впервые была доказана К. Сегербергом [47] (см. также [48]). Согласно [45], наблюдение о сложности **DL** впервые было сделано в неопубликованной работе [46].

Результаты о логике бесконечного множества более новые. По-видимому, теорема 33 впервые была опубликована в [8] (см. также [37]). Насколько нам известно, теорема 27 ранее нигде не была сформулирована; аксиоматика логики $(X, \neq_X)$ была также известна Л.Л. Максимовой (личное сообщение авторам). Ряд синтаксических и алгебраических свойств расширений **DL** рассматривался в недавних работах [5], [4].

5.4. Стандартный перевод для DL и S5

В силу теоремы 18, для логики **DL** мы можем описать стандартный перевод, рассматривая R как неравенство. В этом случае каждая модальная формула φ переводится в формулу первого порядка $\varphi^{\neq}$ так:

$$\begin{aligned}
&p_i^{\neq}(t) := P_i(t),\\
&(\neg\varphi)^{\neq}(t) := \neg\varphi^{\neq}(t),\\
&(\varphi \to \psi)^{\neq}(t) := \varphi^{\neq}(t) \to \psi^{\neq}(t),\\
&(\varphi \wedge \psi)^{\neq}(t) := \varphi^{\neq}(t) \wedge \psi^{\neq}(t),\\
&(\varphi \vee \psi)^{\neq}(t) := \varphi^{\neq}(t) \vee \psi^{\neq}(t),\\
&(\Box\varphi)^{\neq}(t) := \forall x\,(x \neq t \to \varphi^{\neq}(x)),\\
&(\Diamond\varphi)^{\neq}(t) := \exists x\,(x \neq t \wedge \varphi^{\neq}(x)).
\end{aligned}$$

Теорема 10 о стандартном переводе и теорема 24 дают следующую сводимость **DL** к классическому исчислению предикатов (с равенством):

Следствие 34. $\mathbf{DL} \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash \forall t\, \varphi^{\neq}(t)$.

Логика **DL** в определенном смысле является «более выразительным» вариантом известной логики Льюиса **S5**, которая определяется так:

$$\mathbf{S5} := \mathbf{S4} + p \to \Box\Diamond p.$$

В семантике Крипке три аксиомы этой логики соответствуют рефлексивности, транзитивности и симметричности, т.е. имеет место

Лемма 35. $(W, R) \vDash \mathbf{S5} \;\Leftrightarrow\; R$ — отношение эквивалентности.[22]

[22] Алгебраическими моделями **S5** являются так называемые *монадические алгебры*, см. [34].

Логика **S5** во многом похожа на **DL**. Так, легко видеть, что конусы **S5** — это шкалы вида $(X, X \times X)$. На таких шкалах модальные операторы $\Box$ и $\Diamond$ интерпретируются как кванторы всеобщности и существования. Аналогично конструкциям, приведенным в разделах 5.1 и 5.2, можно доказать следующую теорему (подробнее см., например, в [25]):

Теорема 36.

(1) **S5** — логика класса всех шкал вида $(X, X \times X)$.[23]

(2) $\varphi \in$ **S5** $\Leftrightarrow$ φ общезначима во всех конечных шкалах вида $(X, X \times X)$ размера не более $|\varphi|$.

(3) **S5** разрешима и, более того, coNP-полна.

Для **S5** модифицируем стандартный перевод следующим образом:

$$(\Box\varphi)^{\otimes}(t) := \forall x\, \varphi^{\otimes}(x),$$
$$(\Diamond\varphi)^{\otimes}(t) := \exists x\, \varphi^{\otimes}(x).$$

Из теоремы 36 и теоремы о стандартном переводе получаем

Следствие 37. **S5** $\vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash \forall t\, \varphi^{\otimes}(t)$.

Выше мы упомянули, что логика **DL** «более выразительна», чем логика **S5**. Придадим этому замечанию строгий смысл. Для модальной формулы φ определим модальную формулу $\varphi^{\odot}$ так:

$$\begin{aligned}
&p^{\odot} := p,\\
&(\neg\varphi)^{\odot} := \neg\varphi^{\odot},\\
&(\varphi \to \psi)^{\odot} := \varphi^{\odot} \to \psi^{\odot},\\
&(\varphi \wedge \psi)^{\odot} := \varphi^{\odot} \wedge \psi^{\odot},\\
&(\varphi \vee \psi)^{\odot} := \varphi^{\odot} \vee \psi^{\odot},\\
&(\Box\varphi)^{\odot} := \Box\varphi^{\odot} \wedge \varphi^{\odot}\\
&(\Diamond\varphi)^{\odot} := \Diamond\varphi^{\odot} \vee \varphi^{\odot}.
\end{aligned}$$

[23] Этот факт был установлен впервые М. Вайсбергом еще в 1930-е годы.

Несложно проверить, что общезначимость формулы φ в шкале $(X, X \times X)$ равносильна общезначимости формулы $\varphi^{\odot}$ в шкале $(X, \neq_X)$[24]. Теперь из теорем 24 и 36 получаем

Следствие 38. $\mathbf{S5} \vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathbf{DL} \vdash \varphi^{\odot}$.

6. Заключение

В этой работе мы коснулись лишь нескольких основных свойств пропозициональных модальных логик — полноты по Крипке, разрешимости, алгоритмической сложности, конечной аксиоматизируемости. Множество вопросов осталось за рамками нашего обсуждения. Как правило, общие проблемы в области модальных логик оказываются нетривиальными, хотя бы потому, что этих логик слишком много — континуум.

Остановимся кратко на некоторых направлениях исследований.

- Алгебраические проблемы

  Как отмечалось в разделе 3.5, пропозициональные модальные логики в точности соответствуют многообразиям модальных алгебр. Таким образом, логические проблемы тесно связаны с алгебраическими, и многие задачи решаются во взаимодействии логических и алгебраических методов. Подробнее см. в [25], [22]. Кроме того, модальные алгебры (и соответственно, модальные логики) возникают при изучении других алгебраических структур, связанных с логикой — цилиндрических и реляционных алгебр; см., например, [43].

- Теория соответствия

  Модальная формула φ соответствует классической $\mathcal{L}_0$-формуле Φ, если в любой шкале общезначимость φ равносильна истинности Φ (см. раздел 4). Теория соответствия исследует эту взаимосвязь модальных и классических формул. Для каких модальных формул есть классические аналоги, и наоборот? Когда можно найти соответствующие формулы алгоритмически? Какого вида они могут быть? В данной области применяется нетривиальная теоретико-модельная техника, но трудные вопросы пока остают-

[24] На самом деле, этот факт верен для любых двух шкал (W, R) и $(W, R^{\odot})$, где $R^{\odot}$ — *рефлексивное замыкание* R, полученное добавлением всех пар вида (x, x) к отношению R.

ся нерешенными. См. главу 5 в «Справочной книге по модальной логике» [18].

- Общая теория окрестностных и топологических моделей модальных логик

  В этой области вопросов больше, чем ответов. В отличие от семантики Крипке, для окрестностной семантики почти не изучена проблема полноты. А также мало понятно, какие свойства топологических пространств выразимы на модальном языке, как можно охарактеризовать модальными средствами более сложные структуры (например, гладкие многообразия, динамические системы и проч.).

- Синтаксические свойства модальных исчислений

  Сюда относятся различные интерполяционные свойства, дизъюнктивное свойство, унификация, допустимость правил. Здесь было получено несколько глубоких результатов, но общие проблемы остаются нерешенными. См. например [25] или [18, гл. 8].

- В этой работе мы говорили о модальных логиках в пропозициональном языке. Исследование модальных логик первого порядка — самостоятельное большое направление; ему посвящена обширная библиография [29].

Как мы отмечали, природа точек моделей или атомарных высказываний не важна с математической точки зрения. Поэтому формальные определения семантики оставляют нам свободу для разнообразных приложений модальной логики.

Перечислим некоторые из направлений, в которых возникают такие применения.

- Формальная верификация

  Если модель Крипке рассматривать как совокупность состояний и переходов вычислительной системы, то в этом случае модальные формулы описывают свойства вычислительного процесса. Это позволяет использовать язык модальной логики в таких задачах, как верификация моделей программ (model checking), см. [18, гл. 17]; [3].

- Дескрипционные логики

  Дескрипционные логики (или «языки онтологий») были разработаны для формального представления фактов о данной предметной области (баз данных или баз знаний). Во многих случаях имеется непосредственная связь дескрипционных языков с модальными, а потому методы модальной логики успешно применимы. На основе дескрипционных логик уже построены несколько огромных эффективно работающих баз знаний; см. [18, гл. 13].

- Теория доказательств

  Одно из своих наиболее важных приложений модальные логики находят в самой математической логике, а именно — в теории доказательств. Мы упоминали одну из таких логик в разделе 3 — логику **GL**, в которой модальности интерпретируются как доказуемость и непротиворечивость в формальной арифметике. Системы такого рода называют *логиками доказумости*, и **GL** здесь далеко не единственный (хотя, по-видимому, и самый известный) пример. Подробнее о логиках доказуемости см. [23], [16] и главу 16 в [18].

- Эпистемические логики

  Независимо от представления знаний, развивается исследование логик, в которых «знание» понимается как модальность. Здесь имеется, с одной стороны, связь с логиками доказательств [18, гл. 16]; с другой — с системами передачи информации [26].

- Пространственные логики

  Под пространственными логиками понимаются формальные системы, описывающие взаимоотношения пространственных объектов: это могут быть точки или подмножества какого-то пространства с геометрической или топологической структурой — например, интервалы на прямой, области в пространстве и т.п. О применении модальных логик в этом направлении см. главы 5, 6, 9, 10 в «Справочной книге по пространственной логике» [17].

Наконец, отдельно отметим одну глобальную задачу модальной логики, связанную с ее математической стороной и принципиальную для ее приложений: комбинирование модальных систем. В связи с этим изучаются полимодальные логики (такие как временные логики или модальные произведения, см. [28]), системы со считающими (graded) модальностями, динамические логики, модальное μ-исчисление и др. На этих направлениях в современной модальной логике удачно сочетаются выразительная сила языка и алгоритмические свойства возникающих в нем теорий.

Литература

[1] *Апресян Ю.Д.* Лексическая семантика. М.: Наука, 1974.

[2] Справочная книга по математической логике. В 4-х частях. / Под ред. Дж. Барвайса. Наука, ФМЛ, 1982.

[3] *Кларк Э.М., Грамберг О., Пелед Д.* Верификация моделей программ: Model Checking. М.: МЦНМО, 2002.

[4] *Карпенко А.В.* Интерполяция в слабо транзитивных модальных логиках // Алгебра и логика. 2012. Т. 51. С. 197–215.

[5] *Карпенко А.В., Максимова Л.Л.* Простые слабо транзитивные модальные алгебры // Алгебра и логика. 2010. Т. 49. С. 346–365.

[6] *Клини С.К.* Математическая логика. М.: Мир, 1973.

[7] *Крупский В.Н.* Введение в сложность вычислений. М.: Факториал Пресс, 2006. С. 128.

[8] *Кудинов А., Шапировский И.* Некоторые примеры модальных логик без конечной аксиоматики // Информационные технологии и системы (ИТиС'10) / Институт проблем передачи информации. 2010. С. 258–262.

[9] *Китаев А., Шень А., Вялый М.* Классические и квантовые вычисления. М.: МЦНМО, 1999.

[10] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения формальной логики. М.: Издательство иностранной литературы, 1959.

[11] *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

[12] *Пентус М.Р.* Исчисление Ламбека и формальные грамматики // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. С. 729–751.

[13] *Успенский В.А., Семёнов А.Л.* Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. Библиотечка программиста. М.: Наука, 1987.

[14] *Успенский В.А.* Что такое нестандартный анализ? М.: Наука, 1987.

[15] *Шаламов В.* Левый берег. М.: Современник, 1989.

[16] *Artemov S.N., Beklemishev L.D.* Provability logic // Handbook of philosophical logic, 2nd ed. Kluwer, 2004. P. 229–403.

[17] Handbook of spatial logics / Ed. by M. Aiello, I. Pratt-Hartmann, J. van Benthem. Springer, 2007.

[18] Handbook of modal logic, Volume 3 (Studies in Logic and Practical Reasoning) / Ed. by P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter. NY : Elsevier, 2006.

[19] *van Benthem J.* Modal logic and classical logic. Humanities Press, 1988.

[20] *Bezhanishvili G.* Locally finite varieties // Algebra Universalis. 2001. Vol. 46, no. 4. P. 531–548.

[21] *Bar-Hillel Y., Gaifman C., Shamir E.* On categorial and phrase structure grammars // Bulletin of the Research Council of Israel. 1960. P. 1–16.

[22] *Blackburn P., de Rijke M., Venema Y.* Modal logic. NY : Cambridge University Press, 2001.

[23] *Boolos G.* The logic of provability. Cambridge University Press, 1993.

[24] *Chellas B.F.* Modal logic: an introduction. Cambridge University Press, 1980.

[25] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal logic. Oxford University Press, 1997. Vol. 35 of Oxford Logic Guides.

[26] *Fagin R., Moses Y., Halpern J.Y., Vardi M.Y.* Reasoning about knowledge. The MIT Press paperback series. MIT Press, 2003.

[27] *Fine K.* An ascending chain of S4 logics // Theoria. 1974. Vol. 40, no. 2. P. 110–116.

[28] *Gabbay D.M., Kurucz A, Wolter F., Zakharyaschev M.* Many-dimensional modal logics: theory and applications. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier Science, 2003.

[29] *Gabbay D., Shehtman V., Skvortsov D.* Quantification in non-classical logics. Studies in Logic and Foundations of Mathematics. Elsevier, 2009.

[30] *Gödel K.* Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. 1933. Vol. 4. P. 39–40.

[31] *Goldblatt R.* Logics of time and computation. CSLI Lecture Notes no. 7. 2 edition. Center for the Study of Language and Information, 1992.

[32] *Goldblatt R.* Mathematics of modality. CSLI Publications, 2000.

[33] *Goldblatt R.* Mathematical modal logic: a view of its evolution // Journal of Applied Logic. 2003. Vol. 1, no. 5-6. P. 309–392.

[34] *Halmos P., Givant S.* Logic as algebra. The Dolciani mathematical expositions 21. Mathematical Association of America, 1998.

[35] *Jónsson B., Tarski A.* Boolean algebras with operators. Part I // American Journal of Mathematics. 1951. Vol. 73, no. 4. P. 891–939.

[36] *Kuznetsov S., Lugovaya V., Ryzhova A.* Recursive enumerability doesn't always give a decidable axiomatization // XII Tbilisi symposium of language, logic and computation. 2017. P. 109–111. `http://lpcs.math.msu.su/~sk/`.

[37] *Kudinov A., Shapirovsky I., Shehtman V.* On modal logics of Hamming spaces // Advances in modal logic. Vol. 9. London : College Publications, 2012. P. 395–410.

[38] *Ladner R.E.* The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic // SIAM Journal on Computing. 1977. Vol. 6, no. 3. P. 467–480.

[39] *Lewis C.I.* A survey of symbolic logic. Berkeley : University of California Press, 1918.

[40] *Lewis C.I., Langford C.H.* Symbolic logic. Century Co., 1932.

[41] *MacColl H.* Symbolic logic and its applications. Longmans, Green, 1906.

[42] *McKinsey J. C.C., Tarski A.* The algebra of topology // Annals of Mathematics. 1944. Vol. 45. P. 141–191.

[43] *Marx M., Venema Y.* Multi-dimensional modal logic. Applied Logic Series. Springer Netherlands, 1996.

[44] *Pacuit E.* Neighborhood semantics for modal logic. Springer, 2017.

[45] *de Rijke M.* The modal logic of inequality // Journal of Symbolic Logic. 1992. Vol. 57, no. 2. P. 566–584.

[46] *de Smit B., van Emde Boas P.* The complexity of the modal difference operator in propositional logic. 1990. Unpublished note. University of Amsterdam.

[47] *Segerberg K.* 'Somewhere else' and 'some other time' // Wright and wrong: mini essays in honor of Georg Henrik Von Wright on his Sixtieth Birthday. Group in Logic and Methodology of Science of Real Finland, 1976.

[48] *Segerberg K.* A note on the logic of elsewhere // Theoria. 1980. Vol. 46, no. 2-3. P. 183–187.

[49] *Shapirovsky I.* Simulation of two dimensions in unimodal logics // Advances in modal logic. Vol. 8. London : College Publications, 2010. P. 371–392.

[50] *Solovay R.* Provability interpretations of modal logic // *Israel Journal of Mathematics*. 1976. Vol. 25, no. 3-4. P. 287–304.

[51] *Shapirovsky I., Shehtman V.* Modal logics of regions and Minkowski spacetime // Journal of Logic and Computation. 2005. Vol. 15. P. 559–574.

[52] *The Univalent Foundations Program.* Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. Institute for Advanced Study : `https://homotopytypetheory.org/book`, 2013.